维普资讯 http://www.cqvip.com

欧拉等式 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ 的一个证法*

童增祥[1] 张肇炽[2] ([1](美) Otterbein 大学数学科学系, Westerville OH 43081, [2] 西北工业大学, 西安 710072)

摘 要 基于函数项级数一致收敛性概念,给出了欧拉等式(Basel 问题)的一个证明.

关键词 Basel 问题;欧拉等式;函数项级数;一致收敛性 **中图分类号** O173.1

美国数学会确定今年为欧拉年,纪念欧拉(Leonhard Euler 1707-1730)诞辰三百周年. 1753 年,青年欧拉一举解决了当时与费马大定理齐名的,困扰数学家百年之久的 Basel 问题,宣布 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. 雏凤初鸣,震惊世界. 他提出了两种方法,四个证明,个个奇巧、美丽、深刻. 近现代数学家又发现了约二十种更严谨的证法. 美国数学协会(MAA) 出版三种期刊,面向大学数学教师和学生,他们收集欧拉等式的新证法. 半世纪来,已发表了十余种简洁初等的证法. 本文给出的证法只用到函数项级数一致收敛性概念,旨在抛砖引玉,激发大学生的数学兴趣,并以此纪念欧拉三百周年.

函数 $F(y)=\int_0^y\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 和 $f_n(y)=\int_0^y\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$,其中 $n\in Z^+\cup\{0\}$,都是闭区间[0,1]上的连续增函数,而且

$$F(1)=\frac{\pi^2}{8},\tag{1}$$

$$f_n(1)=\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}\theta\mathrm{d}\theta=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.\tag{2}$$

函数 $\arcsin x$ 的马克劳林级数

$$\arcsin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)^2}x^{2n+1}$$

在闭区间上一致收敛.

由魏尔斯特拉斯(Weierstrass) 的 M- 判别法可知,任给 $y\in(0,1)$,函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)^2}\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}$$

在闭区间 $[0,y]$ 上一致收敛于函数 $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

逐项取积分,可知对任意 $y\in[0,1]$,

$$F(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)^2}f_n(y).\tag{3}$$

现考虑上式右端的函数项级数. 任给 $y\in[0,1]$,有

$$\left|\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)^2}f_n(y)\right|\leqslant$$

* 收稿日期:2007—08—14

维普资讯 http://www.cqvip.com

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)^2}f_n(1)=\frac{1}{(2n+1)^2}. \tag{4}$$

因为级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$收敛,所以函数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)^2}f_n(y)$在闭区间[0,1]上一致收敛于一个连续函数$G(y)$. 而且$\forall y\in[0,1)$,$G(y)=F(y)$.

既然函数F和G都在[0,1]上连续,故而

$$\frac{\pi^2}{8}=F(1)=G(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)^2}f_n(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} \tag{5}$$

欧拉等式从下式得出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \tag{6}$$

参考文献

1. J. D. Haper, *Another Simple Proof of* $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$, Amer. Math. Monthly 110(2003), 540－541.

2. J. Hofbauer, *A Simple Proof of* $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$ *and related identities*, Amer. Math. Monthly 109(2002), 196－200.

3. D. Kalman, *Six Ways to Sum a Series*, College Math. J. 24(1933). 402－421.

4. W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd Ed, McGaraw－Hill Book Company, New York, 1976.

(上接 8 页)

例 1 已知$a_n=\frac{\sin1}{2}+\frac{\sin2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$,求数列$\{a_n\}$的极限.

解 $\because a_n=\frac{\sin1}{2}+\frac{\sin2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{2^k}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{2^k}$

在(2)式中,令$q=2,x=1$得$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2\sin 1}{5-4\cos 1}$

这正是[1]所求的结果.

例 2 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n+1)x}{3^n}(-\infty<x<+\infty)$的和函数.

解 $\because \cos(n+1)x=\cos nx\cos x-\sin nx\sin x\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n+1)x}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{3^n}.\cos x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x}{3^n}\sin x$$

在公式(1)(2)式中,令$q=3$,得:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n+1)x}{3^n}=\frac{3\cos^2x-\cos x}{10-6\cos x}-\frac{3\sin^2x}{10-6\cos x}=\frac{3\cos2x-\cos x}{10-6\cos x}$$

参考文献

[1]杨戌. 一收敛数列的极限[J]. 高等数学研究,2004,7(5):39

[2]华乐师范大学,数学分析[M]. 北京:高等教育出版社,2002.